802. Stone ノ定理ノ証明ニ就テ

中野 秀五郎

M. H. Stone ガ Proc. Nat. Ac. 16, (1930) ニテ次ノ定理ヲ述ベ其証明ノ方針ヲ記シタ。

定理. U_t $(-\infty < t < \infty)$ ガ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ニ於ケル unitary transformation ニシテ

(α) $\quad U_t U_s = U_{t+s}$

ナルトキハ

$$(\beta)\quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E(\lambda)f, g)$$

ナルガ如キ identity ノ resolution $E(\lambda)$ ガ存在ス。

J. v. Neumann ガ先ヅ最初ニ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ f, g ノ如何ニ関セズ Lebesgue ノ意味ニテ measurable ナル假定ノモトニ上ノ定理ヲ証明シ，(Annals of Math. Vol 33, 1932) 次イデ M. H. Stone ガ (Annals of Math. Vol 33, 1932) 同一假定デ証明ヲ與ヘタ。又 S. Bochner ガ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ連続ナ場合ノ別証明ヲナシ (Sitzungsberichten Preusz. Akad. Wiss. phys-math Klasse, 1933) 次デ F. Riesz ガ同様ノ方法ヲ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナ場合ニ拡張シタ。(Acta. Szeged. 6. 1934)

J. v. Neumann ノ方法ハ、先ヅ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナルトキハ (α) ナル條件ヨリ U_t ガ t ニ関シ連続ナルコトヲ証明シ。U_t ガ t ニ関シ連続ナ場合ニ

$$(Af, g) = \int_0^{\infty} e^{-t}(U_t f, g)\,dt$$

ナル bounded Operator A ヲ作リ $V = 1 - 2A$ ト擇ブ時ハ V ガ unitary ニシテ且ツ $Vf = f$ ナル時ハ $f = 0$ ノ場合ニ限ルコトガ証明サレ、従ツテ J. v. Neumann ノ Cayley transformation ノ理論ニヨリ

$$g = (V-1)f$$
$$Rg = -i(V+1)f$$
ナル hypermaximal Hermitian Rガ存在シ、コノ R ノ resolution of identily ヲ $E(\lambda)$ トスレバ、此ノ $E(\lambda)$ ニ對シ (β) ガ成立スルコトヲ証明スル方針デアル。

M. H. Stone ノ方法ハ Fourier-Plancherel Theorem ニヨル。

$$\psi(\tau; l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - l} e^{-i\tau\lambda} d\lambda, \quad (\mathfrak{J}(l) \neq 0)$$
$$\frac{1}{\lambda - l} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l)\, e^{i\lambda\tau} d\tau$$
$$(l-m)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l)\,\psi(\sigma-\tau; m)\, d\tau$$
$$= \psi(\sigma; t) - \psi(\sigma; m)$$
ナル公式ヨリ

$$(X_l f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l)(U(\tau) f, g)\, d\tau \quad \mathfrak{J}(l) \neq 0$$
ト置クコトニヨリ bounded operator X_l ガ定義セラレ、次イデ M. H. Stone ノ resolvent ニヨル理論ヨリ

$$X_l = (H - l)^{-1}$$
ナル self-adjoint Hermitian H ガ存在シ、H ノ resolution of identity ヲ $E(\lambda)$ トスレバ、

此ノ $E(\lambda)$ ニテ (β) ガ成立スルトイフ方法デアル。従ッテ Stone ノ方法デハ $(U_t f, g)$ ノ t ニ関スル measurable ヨリ t ニ関スル continuity ヲ証明スル必要ハナク、ソノ点ハ Neumann ノ証明ニ比シ簡単デハアルガ、$\psi(\tau; l)$ ニ関スル性質、其ノ他複雑ナ計算ヲ必要トスル。

S. Bochner ハ連続函数 $p(t)$ ガ

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dV(\lambda)$$

ナルガ如キ単調増加函数 $V(\lambda)$ ニヨル Stieltjes integral ニテ表ハサレル為ノ必要且ツ充分ナル條件ハ任意ノ数 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_m$; $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_m$ ニ對シ常ニ

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\,\rho_\mu \bar{\rho}_\nu \geqq 0$$

ナルコト (S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932) ヲ用ヒテ $(U_t f, f)$ ガ此條件ヲ満足スルコトヲ証明シ、從ッテ

$$(U_t f, f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dV(\lambda)$$

ナル単調増加函数 $V(\lambda)$ ヲ適當ニ定メ、$V(\lambda)=(E(\lambda)f, f)$ ナル Operator $E(\lambda)$ ガ丁度 resolution of identity ニナルコトヲ証明スル方法デアル。

F. Riesz ハ $p(t)$ ガ measurable ナ場合ニ

S. Bochner ノ定理ヲ拡張シ、従ッテ S. Bochner ノ方法ヲ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナ場合ノ Stone ノ定理ヲ証明シタ。

以上 S. Bochner 並ニ F. Riesz ノ方法ハ Fourier Integral ノ理論ノ應用ト見ラレ、M.H. Stone ノハ Hilbert space ノ理論ト Fourier Integral ノ理論ト合セルガ如ク思ハレル。Hilbert space ノ理論ヲ主トシテ、最モ理解シヤスキハ J. v. Neumann ノ方法デアル。然シ Neumann ノ方法デハ $(U_t f, g)$ ノ連続ノ証明ト、A ヨリ R ヲ求メル辺ガ中々難解デアルガ Normal operator ノ理論ヲ用ヒルト遥ニ簡単ニナル様デアル。

Neumann ノ証明ノ改良

$\|(U_t f, g)\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$ ナルヲ以テ、一定ノ f, g ニ對シ、$(U_t f, g)$ ハ $-\infty < t < \infty$ ニテ bounded measurable. 従ッテ

$$(Af, g) = \int_0^\infty e^{-t} (U_t f, g)\, dt$$

ニヨリ Riesz ノ定理ニヨッテ、bounded operator A ガ定義セラレル。此レヲ記号的ニ

$$(1) \quad A = \int_0^\infty e^{-t} U_t \, dt$$

ト書クコトトスレバ、(α) ノ性質ヨリ

(2) $$A^* = \int_{-\infty}^{0} e^{t} U_t \, dt$$

(3) $$U_s A = A U_s = e^{s} \int_{s}^{\infty} e^{-t} U_t \, dt$$

(4) $$AA^* = A^*A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|} U_t \, dt$$

(5) $$A + A^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} U_t \, dt = 2AA^*$$

以上ハ Neumann ノ挙ゲタ式ニテ簡単ニ計算シ得ル。以下ガ Neumann ト異ル方法デアル。

(4)ヨリ A ハ normal, 然カモ bounded ナルヲ以テ hypermaximal. 故ニ

$$A = \int_{\mathfrak{G}} z \, dE(z)$$

ナル measure Operator $E(z)$ ガ存在ス。
然カモ

$$A^* = \int_{\mathfrak{G}} \bar{z} \, dE(z)$$

$$AA^* = \int_{\mathfrak{G}} |z|^2 \, dE(z)$$

故ニ (5) ヨリ

$$\int_{\mathfrak{G}} \left(|z|^2 - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) dE(z) = 0$$

此ノ関係ハ Gaussian plane $\mathfrak{G}$ 全平面ノ積分ニ関ス

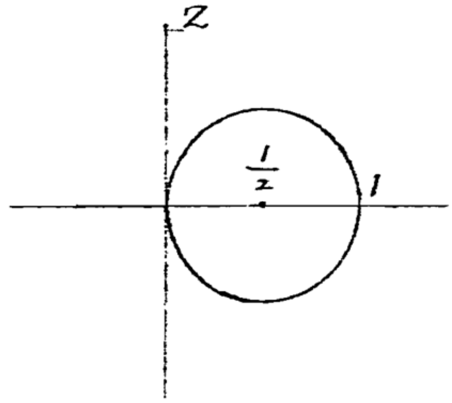
ル性質ナルモ、$\mathfrak{G}$ 上ノ任意ノ measurable set $\mathfrak{Z}$ ニ對シテハ、Aノカハリニ $AE(\mathfrak{Z})$ ヲ考フルコトニヨリ

$$\int_{\mathfrak{Z}}\left(|z|^2-\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right)dE(z)=0$$

故ニ

$$|z|^2=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

ナル曲線、即チ $\frac{1}{2}$ ヲ中心トセル半径 $\frac{1}{2}$ ノ円周ト共有点ヲ有サザル点集合 $\mathfrak{Z}$ ニ對シテハ $E(\mathfrak{Z})=0$. 然カモ此ノ円ハ parameter λ ヲ用ヒテ



$$z=\frac{1}{1-i\lambda}\qquad(-\infty<\lambda<\infty)$$

ニテ表ハサル。故ニ著者ノ紙上談話會ニ於ケル Eigenwertproblem ノ一証明中ノ §4 ニヨリ

$$(6)\quad A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-i\lambda}\,dE(\lambda)$$

此処ニ $E(\lambda)$ ハ

$$z(t)=\frac{1}{1-it}\qquad(-\infty<t<\lambda)$$

ナル点集合ニ對スル measure operator トスル。然ル時ハ若シ

$$\lim_{\lambda\to\infty}E(\lambda)=1$$

ナルトキハ $E(\lambda)$ ハ resolution of identity トナル。

又，コノ條件ハ、Aガ0ヲ Eigenwert トシテ有サヌコトト同一ノコトヲ表ハス。Aガ0ヲ Eigenwertトシテ有サヌコトハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$$Af = 0$$

トスレバ、(3)ヨリ任意ノ g ニ對シ

$$e^{s}\int_{s}^{\infty} e^{-t}(U_t f, g)\,dt = 0$$

s ハ任意ナルヲ以テ、一定ノ g ニ對シ t ノ measure 0 ヲ除キテ

$$(U_t f, g) = 0$$

Hilbert space $\mathfrak{H}$ ハ separable ナルヲ以テ $\mathfrak{H}$ ノ überall dicht ノ Element $g_1, g_2, \ldots\ldots$ ニ對シ結局 measure 0 ヲ除イテ

$$(U_t f, g) = 0$$

故ニ $U_t f = 0$ ナル t ガ存在ス。從ツテ $\|f\| = \|U_t f\| = 0$ トナリ、Aハ0ヲ Eigenwert トシテ有サズ。(6)ノ resolution of identity $E(\lambda)$ ニ對シ

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dE(\lambda)$$

ト置ケバ、V_t ハ unitary ニシテ

$$V_{t+s} = V_t U_s$$

然カモ、t ニ關シテ連續ナルコトハ直チニ知レル。然カモ

$$\int_0^{\infty} e^{-t}(V_t f, g)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-i\lambda}\,dE(\lambda) = A$$

故ニ V_t ニ関シ U_t ト同様ナ計算ガ行ハレ

$$V_s A = A V_s = e^s \int_s^\infty e^{-t} V_t \, dt$$

今，$E_n = E(n) - E(-n)$ ト置ケバ、$f = E_n f$ ナル f ニ對シテハ (6) ヨリ常ニ $\|Af\| \geqq \varepsilon \|f\|$ ナルガ如キ正數 ε ガ存在ス。然カモ E_n ノ rang ニ於テハ A^{-1} モ bounded ナルヲ以テ、此ノ rang ノ任意ノ f ニ対シ、$f = Af_1$ ナル f_1 ガ存在シ、(6) ヨリ任意ノ g ニ対シ

$$(U_s f, g) = (U_s A f_1, g) = e^s \int_s^\infty e^{-t} (U_t f_1, g) \, dt$$

故ニ、$(U_s f, g)$ ハ s ノ連続函數トナル．又 (6) ヲ書キ直スト

$$U_s A = e^s \int_s^\infty e^{-t} U_t \, dt = e^s \int_0^\infty e^{-t} U_t \, dt - e^s \int_0^s e^{-t} U_t \, dt$$

$$U_s A = e^s A - e^s \int_0^s e^{-t} U_t \, dt$$

同様ニ

$$V_s A = e^s A - e^s \int_0^s e^{-t} V_t \, dt$$

故ニ

$$(U_s - V_s) A = -e^s \int_0^s e^{-t} (U_t - V_t) \, dt$$

$f = E_n f$ ナル f ニ對シテハ、$(s > 0)$ トスレバ

$$\varepsilon \|(U_s - V_s) f\| \leqq \|(U_s - V_s) A f\|$$

$$\leqq e^{s}\int_0^s e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt$$

(如何トナレバ一般ニ $A=\int W_t\,dt$ ナルトキハ

$$(Af,g)=\int(W_t f,g)\,dt$$

従ッテ

$$\left|(Af,g)\right|\leqq\int\left|(W_t f,g)\right|dt\leqq\|g\|\int\|W_t f\|\,dt$$

$g=Af$ ト置ケバ

$$\|Af\|\leqq\int\|W_t f\|\,dt\,)$$

従ッテ常微分方程式ノ解ノ *uniqueness* ノ証明ト同様

$$\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\left\{e^{-s}\|(U_s-V_s)f\|\right\}\leqq e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\int_0^s e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt$$

$$\therefore\quad \varepsilon\int_0^s e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\left\{e^{-s}\|(U_s-V_s)f\|\right\}ds$$

$$\leqq-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\int_0^s e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt$$

$$+\ \varepsilon\int_0^s e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\left\{e^{-t}\|(U_s-U_s)f\|\right\}ds$$

$$\therefore\quad \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\int_0^s e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt\leqq 0$$

従ッテ $\|(U_t-V_t)f\|$ ハ連続且ツ負ナラザルニヨリ

$$(U_t-V_t)f=0$$

$\therefore\ U_t f = V_t f$

此レハ $t \geqq 0$ ナル t ニ對シテナルモ、(α) ヨリ $t \leqq 0$ ナル t ニ對シテモ成立ス。又 f ヲ $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ Element トスレバ

$$U_t E_n f = V_t E_n f$$

$n \longrightarrow \infty$ ナラシムレバ

$$U_t f = V_t f$$ ——(証明終)——

(注意) 以上ノ証明ハ Hilbert space ニテ考ヘタルモノニシテ、一般ユークリッド空間デハ成立シナイ。勿論 Neumann, 並ニ Stone ノ証明ハ Hilbert space ノ separability ヲ假定シテヰル。Stone ノ証明中ニテハ明カニハ記シテナイが、t ノ measure 0 ヲ除イテ $(U_t f, g) = 0$ ナルトキハ $U_t f = 0$ ナル t ガ存在スルト述ベテヰルが、此処ニ當然 $\mathfrak{H}$ ノ separability が必要デアル。然シ $(U_t f, g)$ が t ニ關シ連續ナ場合ニハ一般ユークリッド空間ノ場合トシテ証明がソノマヽ成立スルコトが明デアル。

然シ上ノ証明ヨリ明カナ如ク、一般ユークリッド空間ニテモ $U_t f$ が t ニ關シ弱殆連續 (weakly approximately continuous) 即チ如何ナル正數 ε ニ対シテモ measure が ε ヨリ小ナル点集合ヲ適當ニ除ケバ如何ナル g ニ對シテモ $(U_t f, g)$ が

t ニ関シ一様連続ナルトキハ成立ス。$(U_t f, g)$ ガ Hilbert space ニヲ t ニ関シ measurable ナル時ハ Lousin ノ定理ニヨリ Neumann ガ証明セシ如ク $U_t f$ ガ弱殆連続トナリテ、上ノ場合ニ含マレルコトトナル。（U_t ガ unitary ノ場合ニハ強殆連続トナル。一般ニ $U_t f$ ガ弱殆連続デ $\|U_t f\|$ ガ殆連続ナレバ $U_t f$ ハ強殆連続トナル。）

昭和十四年八月一日

附記：　尚 B. v. Sz. Nagy ガ Stone ノ定理ノ別証明ヲ與ヘテヰル。（Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen. Math. Ann. 112. (1936)）.

其ノ方法ハ大体次ノ如クデアル。先ヅ U_1 ニ對シ

$$(U_1 f, g) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda} d(F(\lambda) f, g)$$

ナル resolution of identity $F(\lambda)$ ヲ取リ

$$U_1^{\,t} = \int_0^1 e^{2\pi i t\lambda} dF(\lambda)$$

ヲ考ヘルト此レガ又 (d) ヲ満足シ、t ニ関シ measurable ナコトハ明カデアル。ソコデ $V_t = U_t \cdot U_1^{-t}$ ナルモノヲ考ヘルト、V_t モ (d) ヲ満足シ、然カモ $V_0 = V_1 = 1$ トナリ t ニ関シ週期的ニナル。

$$P_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} V_t \, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

ヨリ P_n ヲ定義スレバ、此ノ P_n ガ Projective operator

ニシテ、$P_nP_m=0$ $(n \neq m)$ ニシテ

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_m = 1$$

且ツ

$$V_t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi n t} P_n$$

トナル。従ツテ

$$U_t = U_1^t \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n$$

今

$$E(\lambda) = F(\lambda - [\lambda]) \cdot P_{[\lambda]} + \sum_{n<[\lambda]} P_n$$

ト置ケバ、此ノ $E(\lambda)$ ニ對シテ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} d(E(\lambda) f, g)$$

ガ証明サレル。コノ証明モ簡單デハアルガ $\sum_{-\infty}^{\infty} P_n = 1$ ヲ証明スルトキ、$S = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty} P_n$ ト置キ

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m t} (V_t S f, g)\, dt = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

ヲ出シ、任意ノ m ニ對シ成立スルヲ以テ t ノ measure 0 ヲ除キ $(V_t S f, g) = 0$ ヲ得ル。此処ニ bounded measurable function ノ フーリエ係數ガ零ナルトキ共ノ function ハ measure 0 ヲ除キ 0 ナリトイフコトヲ用ヒル。